

Démonstration du théorème de Nielsen-Schreier par des revêtements

Timothé Ringard

Résumé : Dans ce TIPE nous allons aborder la notion de revêtement et topologie algébrique, ainsi qu'une de ses applications en théorie des groupes : le théorème de Nielsen-Schreier : tout sous-groupe d'un groupe libre est libre. Nous étudierons donc quelques propriétés des groupes libres, et leur lien avec la topologie algébrique, en particulier avec les graphes. On s'attardera assez peu sur la formalisation topologique, et plus sur les idées mises en jeu.

On utilisera sans les définir les notions d'espace topologique, connexité, connexité simple, d'homotopie, rétraction, rétraction par déformation. Sauf mention contraire, toutes les applications entre espace topologiques sont continues, et on note la composition par la multiplication. Si deux groupes G et H sont isomorphes, on note $G \simeq H$. On pose enfin $I = [0, 1]$.

1 Quelques notions de topologie algébrique

La topologie algébrique permet de relier des objets topologiques à des objets algébrique (des groupes). Une première construction est celle du **groupe fondamental** d'un espace topologique, que l'on définit dans cette partie.

Definition 1.1 (Groupe fondamental). Soit (X, x_0) un espace topologique pointé, γ un lacet tracé sur X basé en x_0 . On note $[\gamma]$ la classe d'équivalence d'homotopie de γ parmi les lacet tracé sur X basés en x_0 .

On note $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ la concaténation de deux chemins, en considérant que γ_1 est parcouru sur $[0, \frac{1}{2}]$ et γ_2 est parcouru sur $[\frac{1}{2}, 1]$, même si cela n'a pas d'importance pour la classe d'homotopie. On note également γ^{-1} le chemin γ parcouru en sens inverse (noter que $\gamma \cdot \gamma^{-1}$ n'est pas le lacet constant).

On vérifie qu'en posant, pour γ_1, γ_2 des lacets tracés sur X basés en x_0 ,

$$[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1 \cdot \gamma_2]$$

$$[\gamma]^{-1} = [\gamma^{-1}]$$

on définit une structure de groupe sur $\pi_1(X, x_0)$. Ce groupe est appelé **groupe fondamental** de (X, x_0) . Dans toute la suite, on suppose que X est connexe par arcs, et on vérifie alors que $\pi_1(X, x_0)$ ne dépend pas de x_0 , à isomorphisme près. On note donc $\pi_1(X)$ ce groupe.

Definition 1.2. Soit $(X, x_0), (Y, y_0)$ deux espaces topologiques pointés connexes par arcs, $f : X \rightarrow Y$ telle que $f(x_0) = y_0$. On définit

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X) &\rightarrow \pi_1(Y) \\ [\gamma] &\mapsto [f\gamma] \end{aligned}$$

Definition 1.3. Soit (X, x_0) un espace topologique pointé connexe par arcs. Un **revêtement** de (X, x_0) est un couple $((\tilde{X}, \tilde{x}_0), \tilde{p})$ où $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ est un espace topologique pointé, et $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow X$ satisfait :



FIGURE 1 – Homotopie de chemins

- $\tilde{p}$ est surjective,
- Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x dans X , un ensemble d'indexation J , une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in J} \in \tilde{X}^J$, tels que pour tout $i \in J$, $\tilde{p}|_{U_i}$ induit un homéomorphisme de U_i sur U , et $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{i \in J} U_i$

Si $\tilde{X}$ est simplement connexe, on dit que $(\tilde{X}, p)$ est un **revêtement universel**. Ceux-ci jouent un rôle important, car ils permettent de déduire des informations sur des revêtements quelconques de X .

On ne s'intéresse qu'aux revêtements pour lesquels $\tilde{X}$ est connexe par arcs.

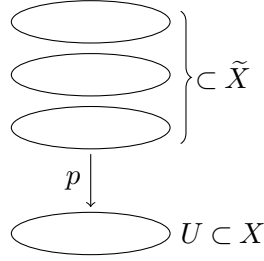


FIGURE 2 – Revêtement

Proposition 1.4 (Unicité du relèvement). *Soit $(\tilde{X}, p)$, un revêtement de X , Y un espace topologique connexe, et $f : Y \rightarrow X$. Soient $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant f . Si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ coïncident en un point, alors elles sont égales.*

Proposition 1.5 (Existence d'un relèvement). *Soit $(\tilde{X}, p)$, un revêtement de X , Y un espace topologique, $f_t : Y \rightarrow X$ une homotopie, $f_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant f_0 . Alors il existe une homotopie $\tilde{f}_t : Y \rightarrow \tilde{X}$ partant de $\tilde{f}_0$ et relevant f_t .*

Les preuves des deux dernières Propositions sont situées en Annexe.

Théorème 1.6. $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

Preuve. S^1 est homéomorphe au cercle unité $\mathbb{U}$ de $\mathbb{C}$. En posant

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{U} \\ x &\mapsto e^{2i\pi x} \end{aligned}$$

on définit un revêtement $(\mathbb{R}, p)$ de $\mathbb{U}$. Pour tout lacet γ tracé sur $\mathbb{U}$, par les Propositions 1.4 et 1.5, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma}$ tracé sur $\mathbb{R}$ relevant γ et partant de 0. On a nécessairement $\tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. De plus si γ' est un lacet tracé sur $\mathbb{U}$ homotope à γ , en notant $H : I^2 \rightarrow \mathbb{U}$ une homotopie, le relèvement de cette

homotopie montre que $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{\gamma}'$ sont homotopes en conservant les extrémités, donc $\tilde{\gamma}'(1) = \tilde{\gamma}(1)$. Ainsi on peut définir $\Phi : [\gamma] \in \pi_1(\mathbb{U}) \mapsto \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$. Montrons que Φ est un isomorphisme de groupes.

Φ est un morphisme car si $[\gamma], [\gamma'] \in \pi_1(S^1)$, le relèvement de γ' partant de $n := \tilde{\gamma}(1)$ est $t \in I \mapsto \tilde{\gamma}'(t) + n$ (il est unique, et celui ci convient). Donc $\Phi([\gamma][\gamma']) = \Phi([\gamma \cdot \gamma']) = n + \tilde{\gamma}'(1) = \Phi([\gamma]) + \Phi([\gamma'])$. De plus Φ est surjective : si $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma : t \in I \mapsto e^{2ni\pi t} \in \mathbb{U}$ est bien un lacet basé en 1 et $\Phi([\gamma]) = n$. Si $[\gamma] \in \ker(\Phi)$, alors γ se relève en un lacet sur $\mathbb{R}$. Or $\mathbb{R}$ est simplement connexe donc $\tilde{\gamma}$ est homotope au lacet trivial sur $\mathbb{R}$, donc $\gamma = p\tilde{\gamma}$ est homotope au lacet trivial sur $\mathbb{U}$. Donc Φ est injective.

Ainsi $\pi_1(S^1) \simeq \pi_1(\mathbb{U}) \simeq \mathbb{Z}$. □

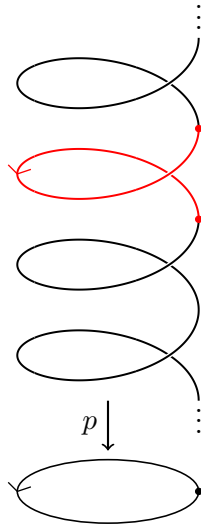


FIGURE 3 – Revêtement de S^1 par $\mathbb{R}$

2 La correspondance entre les sous-groupes de $\pi_1(X)$ et les revêtements de X

Theorème 2.1. *(X, x_0) admet un revêtement universel.*

Preuve. On donne seulement la construction de $\tilde{X}$, sans la justification de sa topologie.

Posons Γ l'ensemble des chemins tracés sur X partant de x_0 , et on définit une relation d'équivalence sur Γ en posant pour $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $[\gamma] = [\gamma']$ si γ et γ' sont homotopes relativement à $\{0, 1\}$. On pose alors

$$\tilde{X} = \{[\gamma], \gamma \in \Gamma\}$$

et

$$p : [\gamma] \in \tilde{X} \mapsto \gamma(1) \in X,$$

qui est bien définie. Comme X est connexe par arcs, p est bien surjective.

On peut choisir comme point de base $[x_0]$ le chemin constant égal à x_0 . Soit $[\gamma] \in \tilde{X}$. Pour $t \in I$, on pose $\gamma_t : s \in I \mapsto \gamma(st) \in X$. Alors $[\gamma_t]$ fournit un chemin de $[\gamma]$ à $[x_0]$ dans $\tilde{X}$, donc $\tilde{X}$ est connexe par arcs.

On montre que $\tilde{X}$ est simplement connexe. Soit $f : I \rightarrow \tilde{X}$ un lacet partant de $[x_0]$. On pose $\gamma = pf$ qui est donc un lacet tracé sur X partant de x_0 . $t \mapsto [\gamma_t] \in \tilde{X}$ est un chemin relevant le lacet γ . Par unicité du relèvement (Proposition 1.4), comme $f(0) = [x_0]$, $[\gamma_t] = f(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Ainsi $[\gamma] = [\gamma_1] = f(1) = [x_0]$. Ainsi $[pf] = [x_0]$, donc f est homotope à un lacet constant, donc $\pi_1(\tilde{X}) = 0$. $\square$

Proposition 2.2. *Pour tout sous-groupe H de $\pi_1(X)$, il existe un revêtement $((\tilde{X}, \tilde{x}_0), \tilde{p})$ de (X, x_0) tel que $\pi_1(\tilde{X})$ soit isomorphe à H .*

Preuve. On considère $(\tilde{X}, p)$ le revêtement universel de X construit à la Proposition précédente. On définit une relation binaire sur $\tilde{X}$ en posant

$$\forall [\gamma], [\gamma'] \in \tilde{X}, [\gamma] \sim [\gamma'] \iff \gamma(1) = \gamma'(1) \text{ et } [\gamma' \cdot \gamma^{-1}] \in H.$$

On vérifie que c'est bien une relation d'équivalence, car H est un groupe, et que l'on peut définir $p_H : X_H \rightarrow X$ qui vaut $p([\gamma]) = \gamma(1)$ sur la classe de $[\gamma]$ pour $\sim$.

On pose ensuite X_H l'espace $\tilde{X}$ quotienté par $\sim$, et on choisit comme point de base la classe de $[c]$ où $c \in \tilde{X}$ est le chemin constant égal à x_0 . On admet les vérifications de la topologie de X_H .

Montrons que $p_{H*}(\pi_1(X_H)) = H$. Soit γ un lacet tracé sur X partant de x_0 . Son relèvement à $\tilde{X}$ est un chemin qui va de $[c]$ à $[\gamma]$, c'est donc un lacet dans X_H si et seulement si $[c] \sim [\gamma]$, c'est à dire $[\gamma] \in H$. Enfin par injectivité de p_{H*} , $\pi_1(X_H)$ est isomorphe à H . $\square$

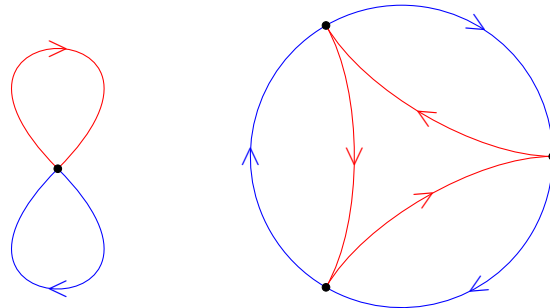


FIGURE 4 – Un graphe X et un revêtement $\tilde{X}$ de X

3 Groupes libres

Definition 3.1. Un **groupe libre** G sur une partie X de G est un groupe vérifiant :

Pour tout groupe H , toute application $f : X \rightarrow H$, il existe un unique morphisme $\varphi : G \rightarrow H$ prolongeant f .

Proposition 3.2. *Si G est un groupe libre sur X , alors X engendre G .*

Preuve. Soit $H = \langle X \rangle$. On pose i_G et i_H les inclusions respectives de X dans G et H , et j l'inclusion de H dans G . G est libre sur X donc on dispose d'un morphisme $\varphi : G \rightarrow H$ tel que $\varphi i_G = i_H$. Ainsi $j\varphi$ et id_G sont deux morphismes de G dans G prolongeant i_H , donc par unicité $j\varphi = id_G$. Donc j est surjective, donc $H = G$.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{i_H} & H & \xrightarrow{j} & G \\
\downarrow i_G & \nearrow \varphi & \nearrow id_G & & \\
G & & & &
\end{array}$$

□

Proposition 3.3. *Pour tout ensemble X , il existe un sous-groupe libre F_X qui soit libre sur X .*

Preuve. On pose formellement $X^{-1} = \{x^{-1}, x \in X\}$, et $A = X \sqcup X^{-1}$, qui est considéré comme un alphabet. On pose F_X l'ensemble des mots réduits sur A , c'est à dire l'ensemble des $a_1 a_2 \cdots a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_n \in A$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_i \neq a_{i+1}^{-1}$ (avec $(x^{-1})^{-1} = x$). On munit F_X d'une structure de groupe en posant $(a_1 \cdots a_n) \cdot (b_1 \cdots b_m) = a_1 \cdots a_{n-k} b_{k+1} \cdots b_m$ où k est minimal tel que $a_{n-k} \neq b_{k+1}^{-1}$. Le neutre est donc le mot vide, et l'inverse de $a_1 \cdots a_n$ est $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$.

Si H est un groupe et $f : X \rightarrow H$, alors on vérifie que l'unique morphisme $F_X \rightarrow H$ prolongeant f est

$$\begin{array}{ccc}
\varphi : & F_X & \rightarrow & H \\
& a_1 \cdots a_n & \mapsto & f(a_1) \cdots f(a_n)
\end{array}$$

où f est étendue naturellement à A par $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$. □

4 Les graphes en topologie algébrique

Définition 4.1. Soit X un espace topologique. Une structure de **graphe** sur X est la donnée de :

- X^0 un sous-espace discret de X , ses **sommets**
- $X^1 = \{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ l'ensemble des **arêtes** de X , telle que tout e_α soit homéomorphe à I ou S^1 , et que les images de 0 et de 1 (respectivement un point $x \in S^1$) par cet homéomorphisme sont dans X^0 (et seulement elles). On note e'_α l'image de $]0, 1[$ (respectivement $S^1 \setminus \{x\}$) par cet homéomorphisme.

On demande en plus que $X = X^0 \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} e'_\alpha$, et que pour toute partie $U \subset X$, U est ouverte dans X si et seulement si pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, $U \cap e_\alpha$ est ouvert dans e_α .

On admet qu'un graphe connexe est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe.

Définition 4.2. Un **arbre** est un graphe contractible.

Si X est un graphe, un **sous-arbre** A de X est un arbre dont l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes sont respectivement contenus dans ceux de X , tel que toute arête de A^1 a ses extrémités dans A^0 . Un sous-arbre est dit **couvrant** si son ensemble de sommets est exactement l'ensemble des sommets de X .

Proposition 4.3. *Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.*

La preuve est située en annexe.

5 Calcul du groupe fondamental des graphes

Lemme 5.1. *Soit X un graphe, A un sous-arbre couvrant de X . Alors $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X/A)$.*

Preuve. On admet la démonstration de ce lemme. L'intuition est qu'une boucle dans X est descriptible uniquement par le chemin qu'elle prend dans les arêtes qui ne sont pas dans l'arbre A .

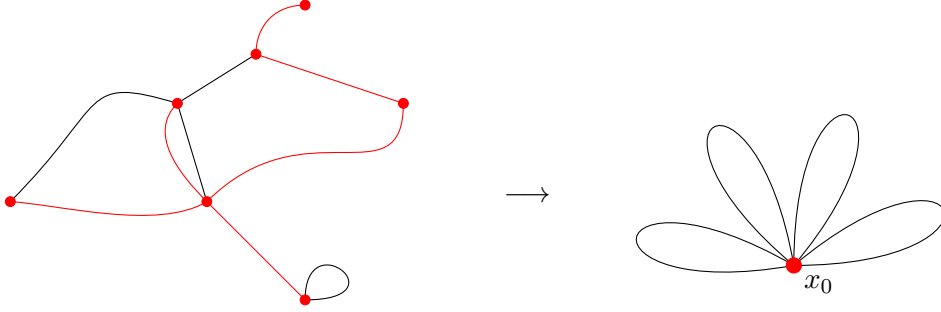


FIGURE 5 – Simplification du problème à l'étude des graphes à un sommet

□

Noter que X/A peut être muni d'une structure de graphe, avec un seul sommet, et dont les arêtes correspondent aux arêtes de X qui ne sont pas dans A . Le calcul de $\pi_1(X)$ revient donc au calcul d'un graphe avec un seul sommet et un nombre quelconque d'arêtes.

Théorème 5.2 (Van Kampen, version simplifiée). *Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On suppose disposer d'une famille de sous-espaces ouverts A_α pour $\alpha \in \mathcal{A}$ tels que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ et $\forall \alpha \in \mathcal{A}, x_0 \in A_\alpha$.*

On suppose de plus que pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \cap A_\beta$ est simplement connexe, et que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ est connexe par arcs. Alors

$$\pi_1(X) \simeq \ast_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_1(A_\alpha).$$

La preuve de ce Théorème est située en Annexe.

Proposition 5.3. *Soit X un graphe avec un seul sommet. Alors $\pi_1(X)$ est isomorphe au groupe libre F_{X^1} .*

Preuve. Pour $e_\alpha \in X^1$, on pose A_α un voisinage ouvert connexe par arcs de e_α , qui ne contienne aucune autre arête en entier. Une représentation est montrée sur la figure 6. Alors A_α se rétracte par déformation sur e_α qui est homéomorphe à S^1 , donc $\pi_1(A_\alpha) \simeq \mathbb{Z}$ par le Théorème 1.6. Les conditions du Théorème 5.2 sont vérifiées, donc $\pi_1(X) \simeq \ast_{e_\alpha \in X^1} \pi_1(A_\alpha) \simeq \ast_{e_\alpha \in X^1} \mathbb{Z} \simeq F_{X^1}$. □

On déduit donc du Lemme 5.1 et de la Proposition 5.3 :

Théorème 5.4. *Soit X un graphe, A un sous-arbre couvrant de X . On pose Y l'ensemble des arêtes de X qui ne sont pas des arêtes de A . Alors $\pi_1(X)$ est isomorphe au groupe libre F_Y .*

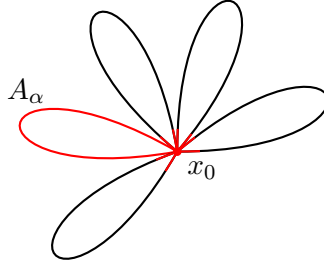


FIGURE 6 – Calcul du groupe fondamental d'un graphe à un sommet

6 Le théorème de Nielsen-Schreier

Lemme 6.1. *Tout revêtement d'un graphe X peut être muni d'une structure de graphe, dont les sommets et les arêtes sont respectivement des relèvements des sommets et des arêtes de X .*

Preuve. Soit $(\tilde{X}, p)$ un revêtement de X . On écrit $X = X^0 \sqcup \bigsqcup_{\alpha \in \mathcal{A}} e'_\alpha$. On pose $\tilde{X}^0 = p^{-1}(X^0)$, qui a bien une topologie discrète. Pour $\alpha \in \mathcal{A}$, on dispose de $g_\alpha : I \rightarrow e_\alpha$. Pour tout $x \in p^{-1}(\{g_\alpha(\frac{1}{2})\})$, il existe une unique $\widetilde{g_{\alpha,x}} : I \rightarrow \tilde{X}$ relevant g_α et valant x en $\frac{1}{2}$. On pose donc $\tilde{X}^1 = \{\widetilde{g_{\alpha,x}}(I), \alpha \in \mathcal{A}, x \in p^{-1}(\{g_\alpha(\frac{1}{2})\})\}$. $\tilde{X}^0$ et $\tilde{X}^1$ font de $\tilde{X}$ un graphe (p est surjective donc $\tilde{X}$ est bien l'union de $\tilde{X}^0$ et des éléments de $\tilde{X}^1$). Enfin, comme p est un homéomorphisme local, la topologie de $\tilde{X}$ est bien celle d'un graphe. $\square$

Le résultat final de cet exposé est alors facile à démontrer :

Théorème 6.2 (Nielsen-Schreier). *Tout sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Preuve. Soit F_E un groupe libre sur un ensemble E , G un sous-groupe de F_E . On considère alors le graphe X composé d'un seul sommet x_0 et d'arêtes autour de ce sommet indexées par E . Par la Proposition 5.3, $\pi_1(X) \simeq F_E$. Par le Théorème 2.2, il existe un revêtement $\tilde{X}$ de X tel que $\pi_1(\tilde{X}) \simeq G$. Par le Lemme 6.1, on peut munir $\tilde{X}$ d'une structure de graphe. Par le Théorème 5.4, $\pi_1(\tilde{X})$ est libre, donc $G \simeq \pi_1(\tilde{X})$ est libre. $\square$

Références

- [1] Allen HATCHER. *Algebraic Topology*. Sous la dir. de Cambridge University PRESS. 2002. URL : <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>.
- [2] Derek HOLT. *Presentation of Groups*. Sous la dir. de BOUYER. 2013. URL : https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/fbouyer/presentation_of_group.pdf.

7 Annexe

Les démonstrations suivantes, bien qu'instructives, ne sont pas fondamentales à la compréhension de cet exposé.

Proposition 7.1 (Unicité du relèvement). *Soit $(\tilde{X}, p)$, un revêtement de X , Y un espace topologique connexe, et $f : Y \rightarrow X$. Soient $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant f . Si $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ coïncident en un point, alors elles sont égales.*

Preuve. Soit $y \in Y$, U un voisinage ouvert de $f(y)$ dans X tel que $p^{-1}(U)$ est l'union disjointe d'ouverts U_α de $\tilde{X}$, homéomorphes à U par p . Soient U_1, U_2 les U_α contenant respectivement $\tilde{f}_1(y)$ et $\tilde{f}_2(y)$. Par continuité de $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$, on dispose d'un voisinage V de y dans Y tel que $\tilde{f}_1(V) \subset U_1$ et $\tilde{f}_2(V) \subset U_2$.

Considérons E l'ensemble des $y \in Y$ tels que $\tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)$. Si $y \in E$, alors $U_1 = U_2$, et $p\tilde{f}_1 = f = p\tilde{f}_2$ sur V . Or p est injective sur $U_1 = U_2$, donc $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ coïncident sur V , donc $V \subset E$. Réciproquement, si $y \in Y \setminus E$, alors U_1 et U_2 sont disjoints, donc pour tout $y' \in V$, $\tilde{f}_1(y') \neq \tilde{f}_2(y')$. Donc $V \subset Y \setminus E$. Donc E est fermé et ouvert dans Y , or Y est connexe, donc $Y \neq \emptyset \implies Y = E$. $\square$

Proposition 7.2 (Existence d'un relèvement). *Soit $(\tilde{X}, p)$, un revêtement de X , Y un espace topologique, $f_t : Y \rightarrow X$ une homotopie, $\tilde{f}_0 : Y \rightarrow \tilde{X}$ relevant f_0 . Alors il existe une homotopie $\tilde{f}_t : Y \rightarrow \tilde{X}$ partant de $\tilde{f}_0$ et relevant f_t .*

Preuve. On pose $F : (y, t) \in Y \times I \mapsto f_t(y) \in X$ et $\tilde{F}_0 : y \in Y \mapsto \tilde{f}_0(y) \in \tilde{X}$. Soit $y \in Y$. On construit un voisinage V de y dans Y et une homotopie $\tilde{F}^y : V \times I \rightarrow \tilde{X}$ relevant $F|_{V \times I}$ et telle que $\tilde{F}^y|_{V \times \{0\}} = \tilde{F}_0|_V$.

Pour tout $x \in X$, on dispose d'un voisinage ouvert U_x de x dans X tel que $p^{-1}(U_x)$ soit réunion d'ouverts de $\tilde{X}$ qui sont envoyés homéomorphiquement sur U_x par p .

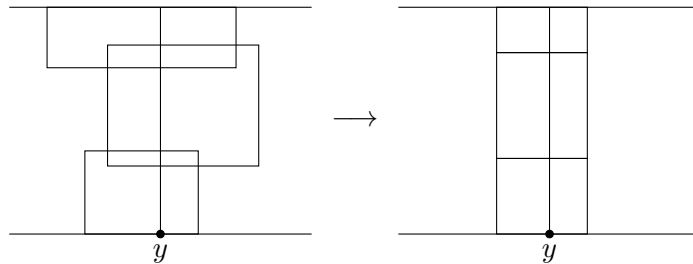


FIGURE 7 – Construction d'un relèvement

Par continuité de F , pour tout $t \in I$, on dispose d'un intervalle ouvert J_t de I (ouvert dans I) contenant t , d'un voisinage ouvert V_t de y dans X tels que $F(V_t \times J_t) \subset U_{f_t(y)}$. Par compacité de I , il existe $T \subset I$ fini tel que $\{y\} \times I$ est recouvert par $(V_t \times J_t)_{t \in T}$. En posant $V' = \bigcap_{t \in T} V_t$, on peut donc trouver $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$ tels que pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $F(V' \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$ où $U_i = U_{f_{t_i}(y)}$.

On définit récursivement pour $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$ un voisinage V_i de y dans Y , et on construit récursivement $\tilde{F}^y$ sur $V_i \times [t_i, t_{i+1}]$. On suppose avoir construit V_j et $\tilde{F}^y$ sur $V_j \times [t_j, t_{j+1}]$ pour tous $j < i$. Soit $\tilde{U}_i$ l'ouvert de $\tilde{X}$ se projetant homéomorphiquement sur U_i par p et tel que $\tilde{F}(y, t_i) \in \tilde{U}_i$. (Pour $i = 0$, la condition est $\tilde{F}_0(y) \in \tilde{U}_i$). On pose V_i tel que $V_i \times \{t_i\} \subset (F|_{V_{i-1} \times \{y\}})^{-1}(\tilde{U}_i)$, cela est possible car $(F|_{V_{i-1} \times \{y\}})^{-1}(\tilde{U}_i)$ est ouvert dans $V_{i-1} \times \{y\}$. On définit enfin $\tilde{F}$ sur $V_i \times [t_i, t_{i+1}]$ en posant $\tilde{F} = (p|_{V_i})^{-1}F$. Noter que le

raccord en $t = t_i$ est continu avec la définition de $\tilde{F}$ sur $V_i \times [t_{i-1}, t_i]$ car p induit un homéomorphisme de $\tilde{U}_{i-1} \cap \tilde{U}_i$ sur $U_{i-1} \cap U_i$.

Posant finalement $V = V_m$, on a ainsi défini $\tilde{F}$ sur $V \times I$. En effectuant cette construction pour tout $y \in Y$, on obtient bien $\tilde{F}$ définie sur $Y \times I$. En effet, si deux voisinages V_1 et V_2 associés à y_1 et y_2 ont une intersection non vide, alors par unicité de relèvement (Proposition 1.4), $\tilde{F}|_{(V_1 \cap V_2) \times I}$ est nécessairement la même dans les deux relèvements construits. D'où le résultat. $\square$

Proposition 7.3. *Tout graphe connexe possède un sous-arbre couvrant.*

Preuve. Soit $s \in X^0$ un sommet de X . On construit récursivement une suite croissante X_n de sous-espaces de X de la manière suivante :

- $X_0^0 = \{s\}$ et $X_0^1 = \emptyset$.
- Ayant construit $X_0, \dots, X_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose X_n^1 l'ensemble des arêtes de X qui ont au moins une extrémité dans X_{n-1} , puis X_n^0 l'ensemble des sommets de X qui sont une extrémité d'une arête dans X_n^1 .

Si $Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$, l'intersection de Y avec chaque arête est soit l'arête entière, soit vide, donc cette intersection est fermée dans l'arête. Donc Y est fermé dans X . De plus pour point $x \in Y$, si $x \in X_k$, alors il existe un voisinage de x dans X contenu dans X_{k+1} , donc Y est ouvert dans X . Comme X est connexe, $X = Y = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$.

On construit ensuite de manière similaire une suite croissante A_n de sous-arbres de X :

- $A_0 = X_0 = \{s\}$.
- Ayant construit $A_0, \dots, A_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n^0 = X_n^0$. Pour construire A_n^1 , on part de A_{n-1}^1 , et on rajoute pour chaque sommet $s' \in A_n^0 \setminus A_{n-1}^0$ une arête qui a s' comme extrémité, et dont l'autre extrémité est dans A_{n-1}^0 .

On pose enfin $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Comme $Y = X$, $A^0 = X^0$. Montrons que A est un arbre. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n se rétracte par déformation sur A_{n-1} en rétractant chaque arête ajoutée. En effectuant cette rétraction sur l'intervalle de temps $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$, on obtient alors une homotopie h de A sur $A_0 = \{s\}$. En effet, h est continue car elle est continue sur chacune des arêtes de A , et qu'une partie $U \subset A$ est ouverte dans A si et seulement si son intersection avec chacune des arêtes de A est ouverte. $\square$

Theorème 7.4 (Van Kampen, version simplifiée). *Soit (X, x_0) un espace topologique pointé. On suppose disposer d'une famille de sous-espaces ouverts A_α pour $\alpha \in \mathcal{A}$ tels que $X = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ et $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $x_0 \in A_\alpha$.*

On suppose de plus que pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \cap A_\beta$ est simplement connexe, et que pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$, $A_\alpha \cap A_\beta \cap A_\gamma$ est connexe par arcs. Alors

$$\pi_1(X) \simeq \ast_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_1(A_\alpha).$$

Preuve. On dispose d'un morphisme naturel $\Phi : \ast_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_1(A_\alpha) \rightarrow \pi_1(X)$, qui à $[f_1] \dots [f_n]$ associe $[f_1 \dots f_n]$. Il suffit de montrer que Φ est un isomorphisme.

Montrons que Φ est surjective. Soit $[f] \in \pi_1(X)$, on cherche à décomposer $[f]$ comme produit de boucles dans les différents A_α . Or si $t \in I$, on a $\alpha_t \in \mathcal{A}$ tel que $f(t) \in A_{\alpha_t}$. Par ouverture de A_α et continuité de f , on dispose d'un intervalle I_t ouvert dans I tel que $\forall s \in I_t, f(s) \in A_{\alpha_t}$. Alors $(A_{\alpha_t})_{t \in I}$ recouvre I donc par compacité de I , on a $t_1 < \dots < t_m$ tel que $(I_{t_1}, \dots, I_{t_m})$ recouvre I . On peut donc

trouver $0 = s_0 < \dots < s_m = 1$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $f([s_i, s_{i+1}])$ soit inclus dans un unique A_α (prendre $s_i \in I_{t_i} \cap I_{t_{i+1}}$ pour $1 \leq i \leq m-1$).

Pour $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on note A_i le A_α tel que $f([s_{i-1}, s_i]) \subset A_i$. Pour $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, on dispose d'un chemin g_i tracé sur $A_i \cap A_{i+1}$ allant de x_0 à $f(s_i)$. Notant f_i le chemin qui parcourt f de s_{i-1} à s_i , on a

$$\begin{aligned} [f] &= [f_1 \cdot g_1^{-1} \cdot g_1 \cdot f_2 \cdots f_{m-1} \cdot g_{m-1}^{-1} \cdot g_{m-1} \cdot f_m] \\ &= [f_1 \cdot g_1^{-1}] [g_1 \cdot f_2 \cdot g_2^{-1}] \cdots [g_{m-2} f_{m-1} \cdot g_{m-1}^{-1}] [g_{m-1} \cdot f_m] \end{aligned}$$

Donc $[f] \in \text{Im}(\Phi)$.

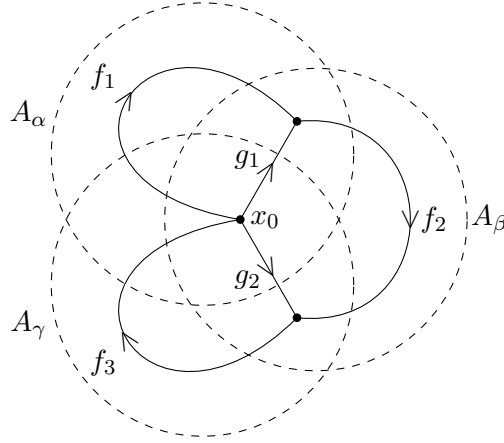


FIGURE 8 – Surjectivité de Φ

Si $[f] \in \pi_1(X)$, on appelle factorisation de $[f]$ tout mot (non nécessairement réduit) $[f_1] \cdots [f_k]$ de $\ast_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_1(A_\alpha)$ tel que $\Phi([f_1] \cdots [f_k]) = [f]$. On dit que deux factorisations sont équivalentes si on peut passer de l'une à l'autre en appliquant cette manipulation ou son inverse : Si $[f_i]$ et $[f_{i+1}]$ sont des termes consécutifs, et que f_i et f_{i+1} sont à image dans le même A_α , alors on remplace $[f_i][f_{i+1}]$ par $[f_i \cdot f_{i+1}]$. Comme cette manipulation ne change pas le mot dans $\ast_{\alpha \in \mathcal{A}} \pi_1(A_\alpha)$, pour montrer que Φ est injective, il suffit de montrer que toutes les factorisations de $[f]$ sont équivalentes. On l'admet dans cet exposé. $\square$